

Examen de Complexité

Durée : 1h30

Documents et calculatrice autorisés

Connexion à Internet interdite (smartphones et ordinateurs interdits)

Justifiez précisément chacune de vos réponses

Le but de ce problème est d'étudier la complexité d'algorithmes, connus dès l'école primaire par tous les enfants du monde : l'addition et la multiplication de nombres écrits en base 10, en numération de position (la manière usuelle que nous utilisons pour écrire les nombres). On suppose disposer d'un ordinateur incapable de réaliser les opérations arithmétiques de base (additions, multiplications). On suppose en revanche qu'il a accès, en temps constant, aux tables d'additions et aux tables de multiplications, pour les nombres composés d'un seul chiffre décimal : on peut ainsi calculer $5 \times 7 = 35$ en temps constant, et on peut isoler en temps constant le chiffre des unités (5) et le chiffre des dizaines (3) de cette multiplication. Il en est de même pour l'addition $5 + 7 = 12$, avec le chiffre des unités (2) et le chiffre des dizaines (1) calculés en temps constant.

On représente un nombre de n chiffres par un tableau dont les indices vont de 0 pour le chiffre des unités, le plus à droite dans l'écriture usuelle du nombre, à $n-1$ pour le chiffre le plus à gauche.

Addition

1. Poser et effectuer l'addition suivante (à reproduire et à compléter dans votre copie) :

$$\begin{array}{r} 5 \ 4 \ 3 \ 8 \\ + \ 4 \ 9 \ 2 \ 7 \\ \hline \end{array}$$

2. Combien d'additions élémentaires à deux chiffres avez-vous utilisées pour effectuer cette addition de deux nombres à quatre chiffres ?
3. Etant donnés deux nombres T et U à n chiffres, représentés dans des tableaux de n éléments $T[0..n-1]$ et $U[0..n-1]$, décrire l'algorithme (en français, ou en pseudo-code) permettant de calculer V , le nombre à $n+1$ chiffres $V[0..n]$ représentant la somme des deux nombres T et U .
4. Combien d'additions élémentaires effectuées cet algorithme au maximum, en fonction de n ?
5. Quelle est sa complexité en mémoire, sans tenir compte de la place occupée par les données d'entrée T et U ? Comment pouvez-vous réduire cette complexité à $O(1)$ en acceptant d'écraser une partie des données d'entrée ?
6. Etant donné un nombre N , exprimez en fonction de N , le nombre de chiffres n nécessaires à la représentation décimale de N . En déduire la complexité de l'addition des deux nombres M et N (avec $M \leq N$), en utilisant l'algorithme de la question 3, généralisé à deux nombres de taille m et n (avec $m \leq n$).

Multiplication

Une première approche pour effectuer la multiplication de deux nombres entiers M et N (avec $M \leq N$), consiste à considérer que l'on peut calculer cette opération, en additionnant M exemplaires du nombre N .

